数理解析研究所講究録
75巻 1969年 27-42

非同期式回路の遅れの問題
——特に表面において滑らかな拡大について

教育大 応用数理　木村　泉

本文の目的は、非同期式回路の理論における次の定理の数学的内容および略証を述べることである。

定理A：遅れを導入した回路が（ある状態に関して）表面において滑らかであるなら、それは（その状態に関して）よい拡大である。

ただし本文ではいわゆる2進的な回路のみを考える。定理Aは2進的でない回路については必ずしも成立しない。

この定理の実用的意義は次の通りである。非同期式回路の設計はふつう、動作に不定の遅延時間を伴なう論理素子が、信号を瞬時に伝える導線で相互接続される、との仮定のもとにおこなわれる。しかしこの仮定は非常に高速で動作する回路では正当とは限らない。というのは導線が信号伝搬についやす遅延時間が、素子の動作時間に比べて無視できないほど

大きいかも知れないからである。そのような場合、上のようにして設計された回路は正しく動作するとは限らない。この困難は“遅れの問題”の名で知られている。

そのようなとき、なお回路の正しい動作を保証するためには、遅れの予想される各導線上にあたかも“遅れの素子”の列があるかの如くに考えて設計をおこなえばよい。[1)] このような余分の遅れの素子を追加して得られる回路が、上定理でいう“遅れを導入した回路”である。それがもとの回路と実用上同じとみなし得るためには、それは“よい拡大”であって、かつ“表面において滑らか”でなければならない。これらの條件のうち前者は後者より、ある意味でずっと複雑である。上定理は前者が後者から導き出せると主張しているものであって、設計の成否をたしかめる手順を簡易化してくれるという意味で有用である。

§1．回路と許容列．

定義 1.1．本文において回路とは、正整数 n と、0 および 1 を成分とする n-tuple すなわち状態 $z=(z_1 z_2 \cdots z_n)$ の全体 S と、写像 $f: S \xrightarrow{into} S$ との三つ組 $C=(n, S, f)$ のことである。$f(z)$ を z' と書く。f は

$$\begin{cases} z_1' = f_1(z_1 z_2 \cdots z_n), \\ z_2' = f_2(z_1 z_2 \cdots z_n), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_n' = f_n(z_1 z_2 \cdots z_n) \end{cases}$$

のようにあらわされる。各 f_i は本文の場合論理関数である。

定義 1.2. $a, b \in S$ と $1 \leq i \leq n$ につき、b_i が a_i または a_i' に等しいとき $a \mathcal{R}_i b$ と書く。$1 \leq i \leq n$ にわたって $a \mathcal{R}_i b$ のとき $a \mathcal{R} b$ と書く。$a \neq b$ かつ $a \mathcal{R} b$ であることを $a \mathcal{R}^* b$ であらわす。S の元の $a(0) \mathcal{R} a(1) \mathcal{R} \cdots$ という形の列(有限長または無限長)を $\mathcal{R}$ 列という。また上で $\mathcal{R}$ を $\mathcal{R}^*$ に書き換えて $\mathcal{R}^*$ 列を定義する。a にはじまり b に終る $\mathcal{R}$ 列があるとき、$a \mathcal{F} b$ と書く。$T \leq S$ につき、$b \in T$ かつ $a \mathcal{F} b$ なる b があるとき $a \mathcal{F} T$ と書く。

定義 1.3. $\mathcal{R}^*$ 列 $a(0), a(1), \cdots$ が、いかなる番号 k と $1 \leq i \leq n$ なる i についても決して下記の (#) をみたさないなら、それは許容列とよばれる。(#): $a(k)_i = a(k+1)_i = \cdots$ かつ $a(k)_i' = a(k+1)_i' = \cdots$ でしかも $a(k)_i \neq a(k)_i'$.

定義 1.4. $T \leq S$ とする。$a = a(0), a(1), \cdots, a(l) = b$ なる $\mathcal{R}$ 列であって $a(k) \in T$ なるものがあるとき $a \mathcal{F}_T b$ と書く。T が輪であるとは、$a, b \in T$ につきつねに $a \mathcal{F}_T$

bなることである。また、いかなる $1 \leq i \leq n$ なる i についても次の条件(b)をみたさないような集合 T は安定であると言われる。(b)：$a \in T$ にわたって a_i, a_i' がともに一定でしかも $a_i \neq a_i'$. 安定な輪をよどみ集合とも呼ぶ。

補題 1.1. R^* 列 ξ が許容列であるための必充条件は、ξ が有限長ならその最後の状態から、そうでなければ ξ に無限回あらわれる状態から成る集合 T_ξ がよどみ集合をなすことである。

〔証〕 ξ が有限長なら明らか。無限長なら、S が有限集合だから ξ のどこからか先は T_ξ の元ばかりから成るから、やはり明らか。

補題 1.2. ある $1 \leq i \leq n$ なる i につき、輪 T の元 a にわたって a_i' が一定なら a_i も一定である。(もし T が安定なら $a_i = a_i'$ となる。)

〔証〕 a_i' の一定値を c とする。$x, y \in T$ かつ $x_i \neq y_i$ とする。T の元のみから成る R 列 $x = a(0), a(1), \cdots, a(\ell) = y$ を作り、$a(h)_i = y_i$ なる最大の h をとると $a(h-1)_i \neq a(h)_i$ だから $y_i = a(h)_i = c$. 同様に $x_i = c$. これは矛盾。

§2. よい拡大.

定義2.1. 回路$C=(n, S, f)$および$C^*=(n^*, S^*, f^*)$につき$n \leq n^*$のとき、C^*をCの拡大という。以下特にことわらない限りn, n^*, S, S^*等を上の意味に使う。

定義2.2. C^*をCの拡大とする。$z^* \in S^*$につき、$1 \leq i \leq n$にわたって$z_i = z_i^*$なる$z \in S$を$\mathrm{rest}(z^*)$と書く。同様に$T^* \subseteq S^*$につき$\{\mathrm{rest}(z^*) \mid z^* \in T^*\}$を$\mathrm{rest}(T^*)$と書く。$S^*$の元の列$\xi^*$があって、その要素$a^*(0)$, $a^*(1)$, ----の任意の隣り合う二つが相異なるとする。そのとき列$\mathrm{rest}(a^*(0))$, $\mathrm{rest}(a^*(1))$, ----から左隣に等しい要素を除いて得られるSの元の列ξを$\mathrm{rest}(\xi^*)$とかく。$\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}^*$をC, C^*の状態、状態の集合、または隣り合う2元の異なる状態列とするとき、$\mathrm{rest}(\mathfrak{X}^*)$を$\mathfrak{X}^*$の($C^*$から$C$への)縮小といい、また$\mathfrak{X}=\mathrm{rest}(\mathfrak{X}^*)$なる$\mathfrak{X}^*$の全体を$\mathrm{ext}(\mathfrak{X})$と書いて、その元を$\mathfrak{X}$の($C$から$C^*$への)拡大という。

定義2.3. C^*をCの拡大とし、$u^* \in S^*$, $u=\mathrm{rest}(u^*)$とする。u^*, uにはじまるC^*, Cの許容列の全体をそれぞれ$\mathfrak{X}^*$, $\mathfrak{X}$とし、$\mathfrak{Y}=\{\mathrm{rest}(\xi^*) \mid \xi^* \in \mathfrak{X}^*\}$とおく。そのときもし$\mathfrak{X}=\mathfrak{Y}$ならば、$C^*$は$u^*$に関して$C$のよい拡大であると称せられる。

補題2.1. 定義2.3において$\mathfrak{X} \supseteq \mathfrak{Y}$なるための必要條

件は、(1) $u^* \ni a^*$ なるすべての $a^* \in S^*$ につき、$1 \leq i \leq n$ にわたって ${a_i^*}' = a_i^*$ と ${a_i^*}' = (rest(a^*))_i'$ のうちの少なくとも一つずつが成立っており、かつ (2) $u^* \ni T^*$ なる C^* のすべてのよどみ集合 T^* につき、$rest(T^*)$ が C のよどみ集合をなすことである。

〔証〕 (1) を否定し、$u^* \ni a^*$ かつ ${a_i^*}' \neq a_i^* \neq (rest(a^*))_i'$ なる a^* があるとする。u^* にはじまり a^* に終る R^* 列が存在するから、そのうしろに $a^{*\prime}$ にはじまる許容列（たとえば $a^{*\prime}, (a^{*\prime})', ((a^{*\prime})')', \cdots$ ）を続けて C^* の許容列 $\xi^* \in \mathfrak{X}^*$ を得るが、$rest(\xi^*) \notin \mathfrak{X}$. (2) を否定し、$u^* \ni T^*$ なる C^* のよどみ集合 T^* で $rest(T^*)$ が C のよどみ集合でないものがあるとする。u^* にはじまり T^* に入ってその元全部を無限回通る C^* の R^* 列 ξ^* が作れて $\xi^* \in \mathfrak{X}^*$ となるが、$rest(\xi^*) \notin \mathfrak{X}$.（補題1.1.） 逆に (1)(2) が成り立つなら任意の $\xi^* \in \mathfrak{X}^*$ に対し $rest(\xi^*) \in \mathfrak{X}$ なることは容易にたしかめられる。

<u>注意 2.1.</u> 物理的には上の (1) は C で起らないはずのスイッチングが C^* で起ってはならぬことを、(2) は C で必ず起るはずのスイッチングが C^* で起らずじまいになってはならぬことを要請しているものである。

§3. 遅れを導入した回路

用語3.1. 回路Cにおいて $1 \leq i, j \leq n$ と $z \in S$ につき、関数値 $f_i(z)$ が変数 z_j に依存するとき、i は j に依存するといい、i を j の子、j を i の親という。

用語3.2. 同じく $z \in S$ にわたって $f_i(z) = z_j$ でしかも $i \neq j$ のとき、i は j の遅延出力であるという。$1 \leq q(0), q(1), \cdots, q(k) \leq n$ について $q(h+1)$ が $q(h)$ の遅延出力なるとき、鎖 $q(1), q(2), \cdots, q(k)$ をCの遅延鎖といい、π であらわす。(但し $0 \leq h < k$.) $q(0), q(k), k$ は π の親、出力、長さと呼ばれ、$q(k)$ の子は π の子と呼ばれる。特に $q(0) = q(k)$ のとき、π は閉じていると称する。

定義3.1. 回路Cの拡大 C^* が遅れを導入した回路であるとは、(1) $n < i \leq n^*$ にわたって i は或る $1 \leq j \leq n^*$ なる j の遅延出力であり、(2) $n < i \leq n^*$ なる i ばかりから成る閉じた遅延鎖がなく、(3) (任意の $n < i \leq n^*$ なる i を出力とする $n < j \leq n^*$ なる j ばかりから成る最長の遅延鎖がただ一つあるが、それを $\pi(i)$ とすると、) $n < k < k' \leq n^*$ のとき $\pi(k)$ と $\pi(k')$ は親を共有するなら子を共有せず、(4) $z^* \in S^*$ から次のようにして作られた $z^{[k]}$ がつねに $f_k(z^{[k]}) = f_k^*(z^*)$ をみたすことである。(但し $1 \leq k \leq n$.) すなわち $1 \leq j \leq n$ にわたり、$z_j^{[k]}$ を、も

し k, j を $\pi(i)$ の子、親としてもつような $n < i \le n^*$ なる i があれば z_i^* ととり、そのような i がなければ z_j^* ととることによって $z^{[k]} \in S$ を得るのである。$z^{[k]}$ を z^* の k から見た虚像と称する。

例 3.1. C の f を $z_1' = \overline{z}_3$, $z_2' = \overline{z}_1$, $z_3' = \overline{z}_2$, $z_4' = z_1 \vee z_2 \vee z_3 \vee z_4$ とするとき、f^* として $z_1' = \overline{z}_3$, $z_2' = \overline{z}_1$, $z_3' = \overline{z}_2$, $z_4' = z_5 \vee z_2 \vee z_3 \vee z_4$, $z_5' = z_1$ をもつ C^* は遅れを導入した回路である。$z^* = (11000)$ の縮小 z は (1100), 4 から見た虚像 $z^{[4]}$ は (0100) である。

補題 3.1. C^* を C の遅れを導入した回路とし、$x^* \in S^*$ とする。$i \in \Delta A \subseteq \{ i \mid n < i \le n^* \}$ につき、$\pi(i)$ とその親 $q(0)$ を並べて $q(0), q(1), \cdots, q(k) = i$ のように書いたとき、$q(h) \notin \Delta A$ なる h のうち最大のもの h_{max} をとって $p'(i) = q(h_{max})$ とおく。$i \in \Delta A$ に対し $y_i^* = y_{p'(i)}^*$, $i \notin \Delta A$ に対して $y_i^* = x_i^*$ なる $y^* \in S$ (x^* と ΔA によって一意に定まる) は $x^* \dashv_T y^*$ をみたす。但し $T = \mathrm{ext}(\mathrm{rest}(x^*))$.

〔証〕 $\alpha(i) = k - h_{max}$ とおく。$\alpha(i)$ の $i \in \Delta A$ にわたる最大値を l とし、$0 \le h \le l$ にわたって $z^*(h) \in S^*$ を、$i \in \Delta A$ かつ $\alpha(i) \le h$ なる i に対しては $z^*(h)_i = y_i^*$, それ以外の $1 \le i \le n^*$ なる i については $z^*(h)_i = x_i^*$ ととる

ことによって定義する。すると $x^* = z^*(0)\ \mathcal{R}\ z^*(1)\ \mathcal{R} \cdots \mathcal{R}$ $z^*(\ell) = y^*$ かつ $z^*(h) \in \mathrm{I}$ だから補題を得る。

<u>補題3.2.</u> 前補題において $\Delta A = \{ i \mid n < i \leq n^* \}$ のとき、y^* は $x = \mathrm{rest}(x^*)$ によって一意に定まり、$1 \leq j \leq n$ にわたって $y_j^{*\prime} = x_j^{\prime}$ を、また $n < j \leq n^*$ にわたって $y_j^{*\prime} = y_j^*$ をみたす。

［証］ 定義3.1 の條件(4)と用語3.2 から明らか。

<u>補題3.3.</u> C^* が C の遅れを導入した回路なら、すべての $u^* \in S^*$ について定義2.3 において $\mathrm{X} \leq \mathrm{Y}$.

［証］ $u = a(0), a(1), \cdots$ を X の元とし、ξ と名づける。$\Delta A = \{ i \mid n < i \leq n^* \}$ とし、$x^* = u^*$ とおいて補題3.1 の証にいう $\mathcal{R}$ 列 $z^*(0), z^*(1), \cdots, z^*(\ell) = y^*$ を作り $\xi^*(0)$ と名づける。次に上の y^* から新しい x^* を、$1 \leq i \leq n$ にわたって $x_i^* = a(1)_i$, $n < i \leq n^*$ にわたって $x_i^* = y_i^*$ とおくことによって作り、この x^* にあらためて補題3.1 を適用し、新しい $z^*(0), z^*(1), \cdots, z^*(\ell) = y^*$ を得てこれを $\xi^*(1)$ と名づける。以下同様にして得られる $\mathcal{R}$ 列を $\xi^*(0), \xi^*(1), \cdots$ のように並べて S^* の元の列 ξ^* を得る。補題3.2 によれば上の古い y^* と新しい x^* は $x^* \mathcal{R}\, y^*$ の関係にあるから ξ^* は C^* の $\mathcal{R}$ 列である。これから左隣に等しい元を省いて C^* の $\mathcal{R}^*$ 列 η^* を得る。η^* において定義1.3 の條件(#)は、$1 \leq i \leq n$ に対しては

$\xi \in \Xi$ についての (#) により、$n < i \le n^*$ に対しては補題3.2において $y_i^{*\prime} = y_i^*$ なることにより、確かに成立する。よって $\eta^* \in \Xi^*$. $\xi = \mathrm{rest}(\eta^*)$ だから補題を得る。

§4. 表面において滑らかな回路.

定義4.1. 回路Cが $u \in S$ なる u と $1 \le i \le n$ なる i に関して部分的に半モジュラー的だとは、$u \mathcal{F} a \mathcal{R} b$ なる a, $b \in S$ に対して、もし $a_i' \neq b_i$ なら $a_i' = b_i'$ となることである。

注意4.1. 従って $u \mathcal{F} a(0) \mathcal{R} a(1) \mathcal{R} \cdots \mathcal{R} a(\ell)$, $a(0)_i = a(1)_i = \cdots = a(\ell)_i$ かつ $a(0)_i' \neq a(0)_i$ なら $a(0)_i' = a(\ell)_i'$.

定義4.2. 回路Cの拡大 C^* が $u^* \in S^*$ に関して表面において滑らかだとは、それが u^* と $1 \le i \le n$ なるすべての i に関して部分的に半モジュラー的であることである。

補題4.1. Cの、遅れを導入した回路 C^* が $u^* \in S^*$ に関して表面において滑らかなら、それは u^* に関して補題2.1の条件(1)をみたす。

[証] $u^* \mathcal{F} a^*$ なのに $a_i^* \neq a_i^{*\prime} \neq (\mathrm{rest}(a^*))_i'$ なる a^* と i があったとしよう。$x^* = a^*$, $\Delta A = \{ i \mid n < i \le n^* \}$ と置いて補題3.1から得る $z^*(0), z^*(1), \ldots, z^*(\ell) = y^*$ に

おいては $x^*(h)_i$ は $0 \leq h \leq l$ にわたって一定であるから、注意4.1から $y_i^{*\prime} = a_i^{*\prime}$ を得る。一方補題3.2から $y_i^{*\prime} = (\mathrm{rest}(y^*))_i' = a_i'$ であるから、これは矛盾である。

§5. 定理Aの略証.

補題2.1, 3.3および4.1から見て、補題2.1の條件(2)を仮定して矛盾を導けばよいことがわかる。そこで $\mathcal{U}^* \not\ni T^*$ なる C^* のよどみ集合 T^* があって、$T = \mathrm{rest}(T^*)$ が C のよどみ集合にならなかったとしよう。同補題の條件(1)は成り立っているのだから、T は輪ではある。だからそれは安定でない。つまり或る $1 \leq r \leq n$ なる r があって、$a \in T$ にわたって a_r, a_r' がともに一定でしかも $a_r \neq a_r'$ だということになる。

T^* の元だけから成り、T^* の元を少なくとも一回ずつ含む閉じた $\mathcal{R}^*$ 列 $a^*(0), a^*(1), \cdots, a^*(l) = a^*(0)$ を作る。輪の定義からみて、これはつねに可能である。また $n < i \leq n^*$ なる i に(正の)一貫番号 $N(i)$ を、i が j の子なら $N(i) < N(j)$ となるように与える。これも定義3.1の條件(2)からみて、可能である。番号が1からはじまり、とびがないものとすれば $N(i) \leq n^* - n$ となる。以下特にことわらぬ限

り $0 \le k \le n^* - n$, $0 \le h \le \ell$ とする。

$\Delta A_k = \{ i \mid n < i \le n^*,\ N(i) \le k \}$ とおく。補題3.1において $x^* = a^*(h)$, $\Delta A = \Delta A_k$ と置いて作った y^* を $a_k^*(h)$ と書く。明らかに $a_0^*(h) = a^*(h)$, $a_k^*(0) = a_k^*(\ell)$ である。$I^*(h) = \mathrm{ext}(\mathrm{rest}(a^*(h))$ とすると $k < n^* - n$ について $a_k^*(h) \dashv_{I^*(h)} a_{k+1}^*(h)$ が成り立つ。というのは補題3.1において $x^* = a_k^*(h)$, $\Delta A = \Delta A_{k+1}$ とおくと、ちょうど $y^* = a_{k+1}^*(h)$ となるからである。

次に $U^* = \bigcup_{h=0}^{\ell-1} I^*(h)$, $h < \ell$ として $a_k^*(h) \dashv_{U^*} a_k^*(h+1)$ を示そう。それには $b_k^*(h+1) \in S^*$ を、$i \in \Delta A_k$ ならば $b_k^*(h+1)_i = a_k^*(h)_i$ に、$i \notin \Delta A_k$ ならば $b_k^*(h+1)_i = a_k^*(h+1)_i$ $(= a^*(h+1)_i)$ にとることによって定義する。すると $a_k^*(h) \mathrel{R} b_k^*(h+1)$ である。(実際 1° $1 \le i \le n$ のとき、2° $n < i \le n^*$ かつ $i \notin \Delta A_k$ のとき、3° $i \in \Delta A_k$ のときの三つの場合について次のようにして $a_k^*(h) \mathrel{R_i} b_k^*(h+1)$ をたしかめることができる。1° $a^*(h) \dashv_{I^*(h)} a_k^*(h)$ だから注意1.4により、$a^*(h)_i \ne a^*(h)'_i$ なら $a_k^*(h)'_i = a^*(h)'_i$. よって $b_k^*(h+1)_i = a^*(h+1)_i$ は $a^*(h)_i = a_k^*(h)_i$ か $a_k^*(h)'_i$ に等しい。2° i の親を j とすると $a_k^*(h)'_i = a_k^*(h)_j = a^*(h)_j = a^*(h)'_j$ だから上と同様。3° $b_k^*(h+1)_i = a_k^*(h)_i$ だからこのときはつまらない。)一方 $x^* =$

$b_k^*(h+1)$, $\Delta A=\Delta A_k$ に対し、補題3.1 の y^* は $a_k^*(h+1)$ に他ならないから目的は達せられた。

そこで今度はすべての $0<k\leq n^*-n$ なる k と、或る $0\leq h_k<l$ なる h_k に対して $a_k^*(h_k)\,\mathcal{H}_{U^*}\,a_{k-1}^*(h_k+1)$ となることを示そう。$i\in\Delta A_k$ だが $i\notin\Delta A_{k-1}$ なる i とは、つまり $N(i)=k$ なる i である。以下 i をこの意味に使い、j をその親とする。なお $\nu\in\Delta A_{k-1}$ につき、$\Delta A=\Delta A_{k-1}$ および $\Delta A=\Delta A_k$ に対して定義された $p'(\nu)$ をそれぞれ ϕ, ψ とおく。すると $\phi\neq\psi$ であるとすれば $\phi=i$, $\psi=j$ でなければならない。($p'(\nu)$ の定義に戻って考えればじきにわかる。)

さて $0\leq h\leq l$ にわたって $a^*(h)_i'=a^*(h)_j$ が一定とする。すると補題1.2 によって $a^*(h)_i$ も一定となり、$a^*(h)_j$ に等しい。よって $a_k^*(h)=a_{k-1}^*(h)\,\mathcal{H}_{U^*}\,a_{k-1}^*(h+1)$ を得る。

次に或る $0\leq h_k<l$ なる h_k に対し $a^*(h_k)_j\neq a^*(h_k+1)_j$ とする。左辺を P, 右辺を Q と置く。P, Q のいずれか一方は $R\equiv a^*(h_k+1)_i$ に等しい。── ここで序の"2進的"という限定を使った。── $R=Q$ とすると $a_k^*(h_k)\,\mathcal{H}_{U^*}\,a_k^*(h_k+1)=a_{k-1}^*(h_k+1)$ となるから、$R=P$ のときを考える。前に定義した $b_k^*(h_k+1)$ ($=\omega^*$ と書く) が、$a_k^*($

$h_k)R\, w^* \dashv_{U^*} a^*_{k-1}(h_k+1)$ をみたすことを示そう。左半は証明ずみだから、補題3.1において $x^*=w^*$, $\Delta A=\Delta A_{k-1}$ としたときの y^* が $z^*\equiv a^*_{k-1}(h_k+1)$ に等しいことを示せば十分である。$\nu\in\Delta A$ について $z^*_\nu=z^*_{p'(\nu)}$ なることは z^* の定義からわかる。$1\leq\nu\leq n^*$, $\nu\notin\Delta A$ とする。$\nu\neq i$ なら $\nu\notin\Delta A_{k-1}$ だから $z^*_\nu=a^*(h_k+1)_\nu=w^*_\nu=x^*_\nu$ となる。一方 $\nu=i\ (\in\Delta A_{k-1})$ については、$z^*_i=R=P=a^*_k(h_k)_i=x^*_i$ が成り立つ。（最後の等式は $x^*=w^*=b^*_k($ $h_k+1)$ の定義から、その前の等式は j が、$\Delta A=\Delta A_k$ に対して定義された $p'(i)$ に他ならないことから得られる。）よって $y^*=z^*$ であり、したがって h_k はたしかに前の前のパラグラフで述べた通りの性質を持っている。

$\Delta n=n^*-n$ とおく。以上から $a^*_{\Delta n}(0)\dashv_{U^*} a^*_{\Delta n}(h_{\Delta n})\dashv_{U^*} a^*_{\Delta n-1}(h_{\Delta n}+1)\dashv_{U^*} a^*_{\Delta n-1}(l)=a^*_{\Delta n-1}(0)\dashv_{U^*} a^*_{\Delta n-1}(h_{\Delta n-1})\dashv_{U^*}\cdots\dashv_{U^*} a^*_0(l)=a^*_0(0)=a^*(0)$, つまり $a^*_{\Delta n}(0)\dashv_{U^*} a^*(0)$ が得られる。$a^*_{\Delta n}(0)$ は $x^*=a^*(0)$ について補題3.2の y^* にあたるから、$a^*_{\Delta n}(0)'_r=a_{\Delta n}(0)'_r=a(0)_r\neq a(0)_r=a_{\Delta n}(0)_r=a^*_{\Delta n}(0)_r$ となる。（但し $a_{\Delta n}(0)=\mathrm{rest}(a^*_{\Delta n}(0))$, $a(0)=\mathrm{rest}(a^*(0))$ と書き、$a_{\Delta n}(0)=a(0)$ を使った。）それゆえ注意A.1によって $a^*(0)'_r=a^*_{\Delta n}(0)'_r=a(0)'_r$ である。$a^*(0)$ を I^* のどの元にするかは自由であるから、

$a^* \in \mathcal{I}^*$ に対しつねに $a_r^{*\prime} = (\mathrm{rest}(a^*))_r^{\prime}$ となる。右辺は一定値であり、一方 $a_r^* = a_r$ も一定値であって、これらの一定値は互いに異なる。これは $\mathcal{I}^*$ が安定であるという前提に反する。よって定理を得る。

文献

1) I. Kimura, Extensions of Asynchronous Circuits and the Delay Problem. Doctoral dissertation, University of Tokyo, Jan. 10, 1967.

付録—上記文献と本文の間の用語対照表

回路	circuit
状態	state
$\mathcal{R}$-列	R-sequence
$\mathcal{R}^*$-列	R^*-sequence
許容列	allowed sequence
よどみ集合	stagnation set
拡大	extension
縮小	restriction

よい拡大	good extension
依存する	depend
子	receptor node
親	parent node
遅延出力	delay node
遅延鎖	delay path
出力（遅延鎖の）	terminal node
長さ（　〃　）	length
閉じている	closed
遅れを導入した回路	delay network incorporation
kから見た虚像	virtual image as seen from k
部分的に半モジュラー的	partially semi-modular
表面において滑らか	spike-free